

振動の不思議を学ぼう！ ～簡易ぶらんこを漕いでみよう～

瀧 口 三千弘 広島商船高専 商船学科(機関コース)

本日の内容紹介

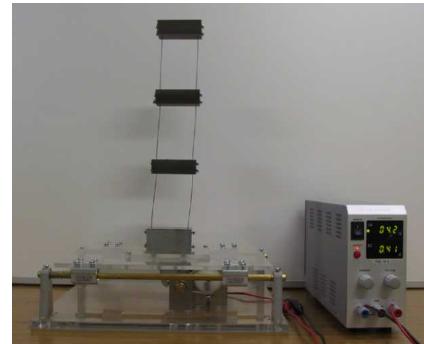
1. はじめに
2. 振動の不思議の予備学習
3. 建物の振動
4. 簡易ぶらんこを漕いでみよう！
5. ねじり振動
6. おわりに

1. はじめに

地震の時に建物が揺れることは誰でも知っています。しかし、同じ地震でも、ある建物にいた人は揺れを強く感じ、他の建物にいた人は小さな揺れしか感じないことがあります。なぜこういう違いが起きるのでしょうか。

本日の授業では、こうした**振動の不思議**に注目し、「物には固有の性格があること、そしてその性格を刺激すると振動が大きくなる」ということを、実験観察を通して学習しましょう。

また、振動の一例の体験として「**簡易ぶらんこ**」漕ぎにチャレンジしてもらいます。ぶらんこの性格を上手に利用すると、簡単に漕ぐことができます。



振動 【しんどう】

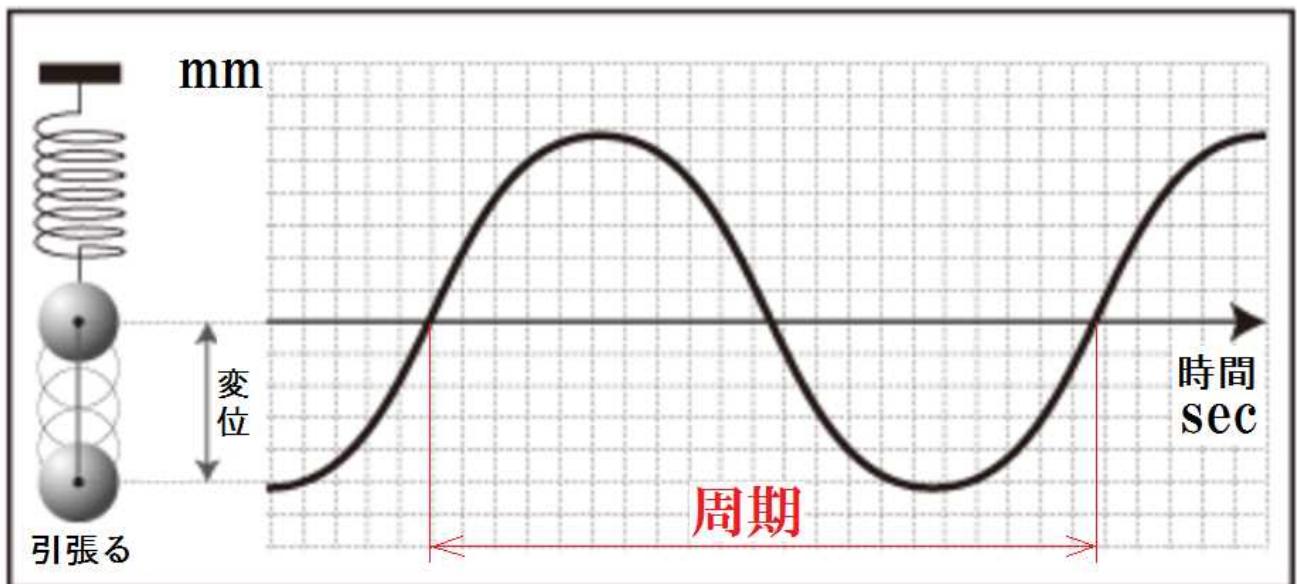
Vibration

【バイブレーション】

2. 振動の不思議の予備学習

- (1) 振動の原理
- (2) 振動数と周期
- (3) 振動数の簡単な測定方法
- (4) 振動問題の特別なルール
- (5) シミュレーションとは
- (6) DSSについて
- (7) 開発した運動と振動の各種教材

(1) 振動の原理



(2) 振動数と周期

・ 振動数 f (Hz) 【ヘルツ】

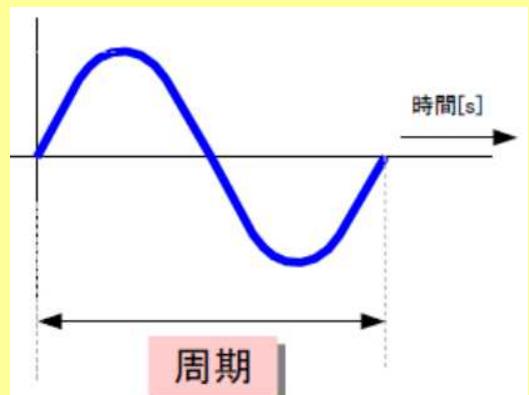
：一定の周期をもってくり返される振動の回数のこと。
1秒間に何回振動するかということ。

・ 周期 T (sec) 【秒】

：振動が一往復に要する時間

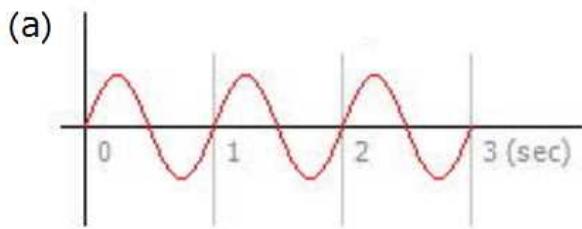
・ 振動数と周期の関係

$$f = \frac{1}{T}$$

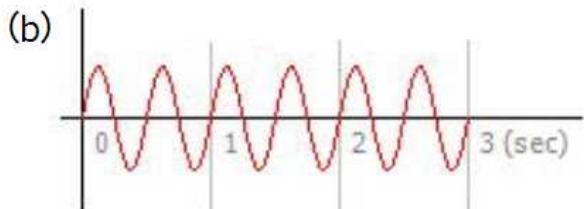


例題

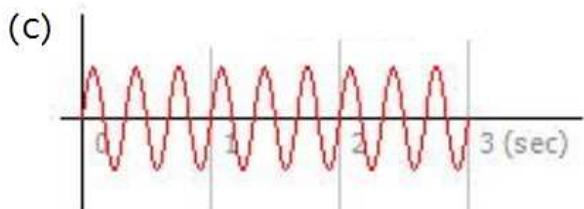
図のような振動波形の振動数 f (Hz)と周期 T (sec)はいくらでしょうか？



振動数 $f = \underline{\hspace{2cm}}$ (Hz)
周期 $T = \underline{\hspace{2cm}}$ (sec)



振動数 $f = \underline{\hspace{2cm}}$ (Hz)
周期 $T = \underline{\hspace{2cm}}$ (sec)



振動数 $f = \underline{\hspace{2cm}}$ (Hz)
周期 $T = \underline{\hspace{2cm}}$ (sec)

(a) 1, 1 (b) 2, 0.5 (c) 3, 0.33

(3) 振動数の簡単な測定方法

- ① 振動体を揺する。
- ② ある回数(x 回)振動するのに必要な時間(t 秒)を計測する。
- ③ 次の計算式で、振動数(f Hz)を求める。

$$f = \frac{x}{t}$$

実際に測定してみよう

$$f = \frac{x}{t}$$

(a) 二重振子の場合



(a) 1次 (1.40Hz)

振動回数 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ (回)
時間 $t = \underline{10}$ (秒)
振動数 $f = \underline{\hspace{2cm}}$ (Hz)



(b) 2次 (3.30Hz)

振動回数 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ (回)
時間 $t = \underline{10}$ (秒)
振動数 $f = \underline{\hspace{2cm}}$ (Hz)

(b) 二重凹形剛体+円柱の振動

$$f = \frac{x}{t}$$



(a) 1次 (2.35Hz)

振動回数 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ (回)
時間 $t = \underline{10}$ (秒)
振動数 $f = \underline{\hspace{2cm}}$ (Hz)



(b) 2次 (3.80Hz)

振動回数 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ (回)
時間 $t = \underline{10}$ (秒)
振動数 $f = \underline{\hspace{2cm}}$ (Hz)

(c) 並列三重振子

(2次省略)

$$f = \frac{x}{t}$$



(a) 1次 (1.63Hz)

振動回数 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ (回)
時間 $t = \underline{\hspace{2cm}}$ (秒)
振動数 $f = \underline{\hspace{2cm}}$ (Hz)



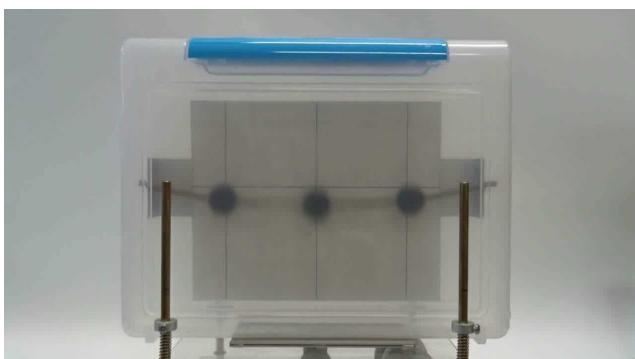
(b) 3次 (4.30Hz)

振動回数 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ (回)
時間 $t = \underline{\hspace{2cm}}$ (秒)
振動数 $f = \underline{\hspace{2cm}}$ (Hz)

(d) 質量のついた弦の場合

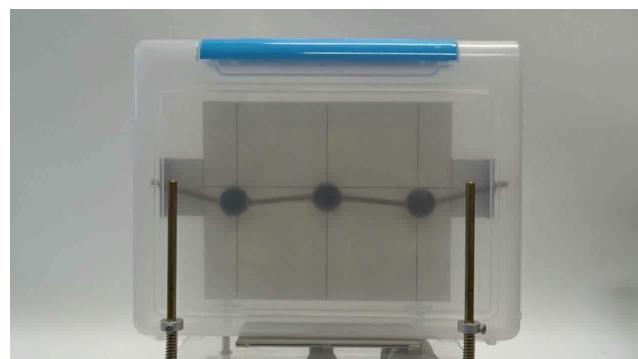
(2次省略)

$$f = \frac{x}{t}$$



(a) 1次 (5.30Hz)

振動回数 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ (回)
時間 $t = \underline{\hspace{2cm}}$ (秒)
振動数 $f = \underline{\hspace{2cm}}$ (Hz)



(b) 3次 (11.75Hz)

振動回数 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ (回)
時間 $t = \underline{\hspace{2cm}}$ (秒)
振動数 $f = \underline{\hspace{2cm}}$ (Hz)

(測定できましたか？)

(4) 振動問題の特別なルール

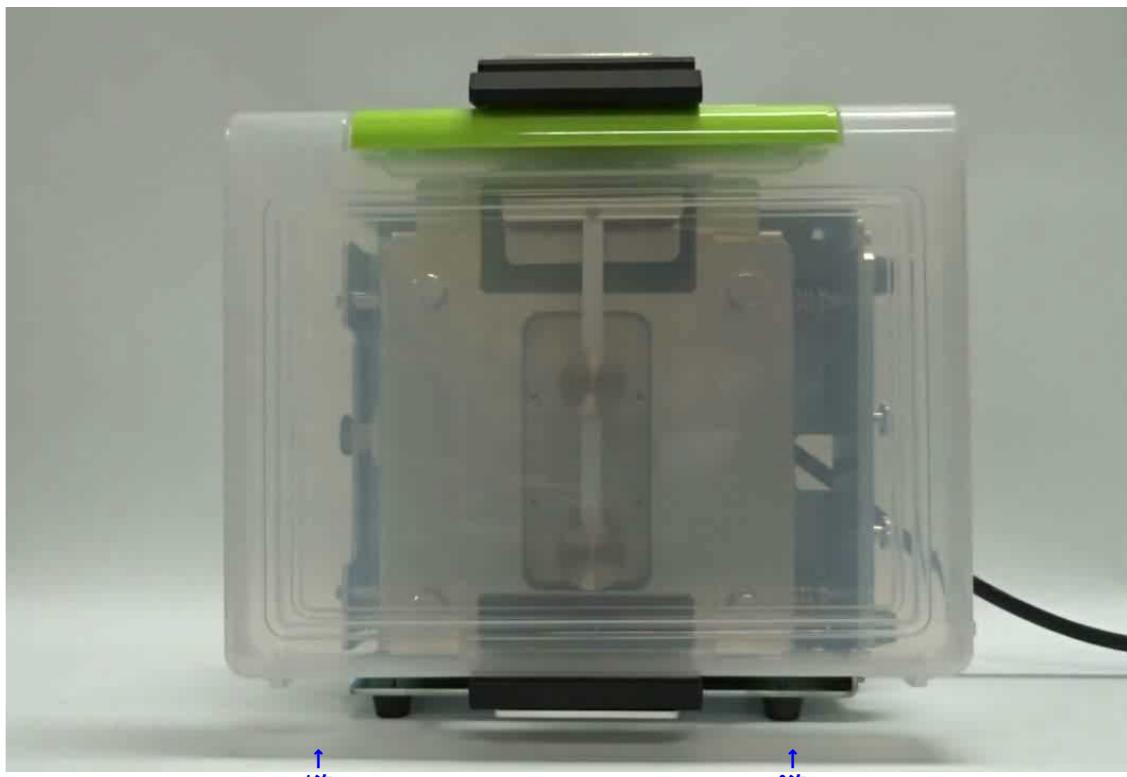
- ・振動には人と同じような性格があります。 → 固有振動数(Hz)
(1秒間に揺れる回数)
- ・その性格によって振動の形が決まります。 → 振動モード
- ・性格の数は対象物によって異なります。
- ・振動の性格を、上手に利用することも大切です。
- ・その性格を刺激すると、とんでもないことも起こります。

→ 共振(Resonance【レゾナンス】)

今日は、この点をとくに知っていただきたいと思います。

共振の実際（水平方向加振）

水平 No. 2
二重振子

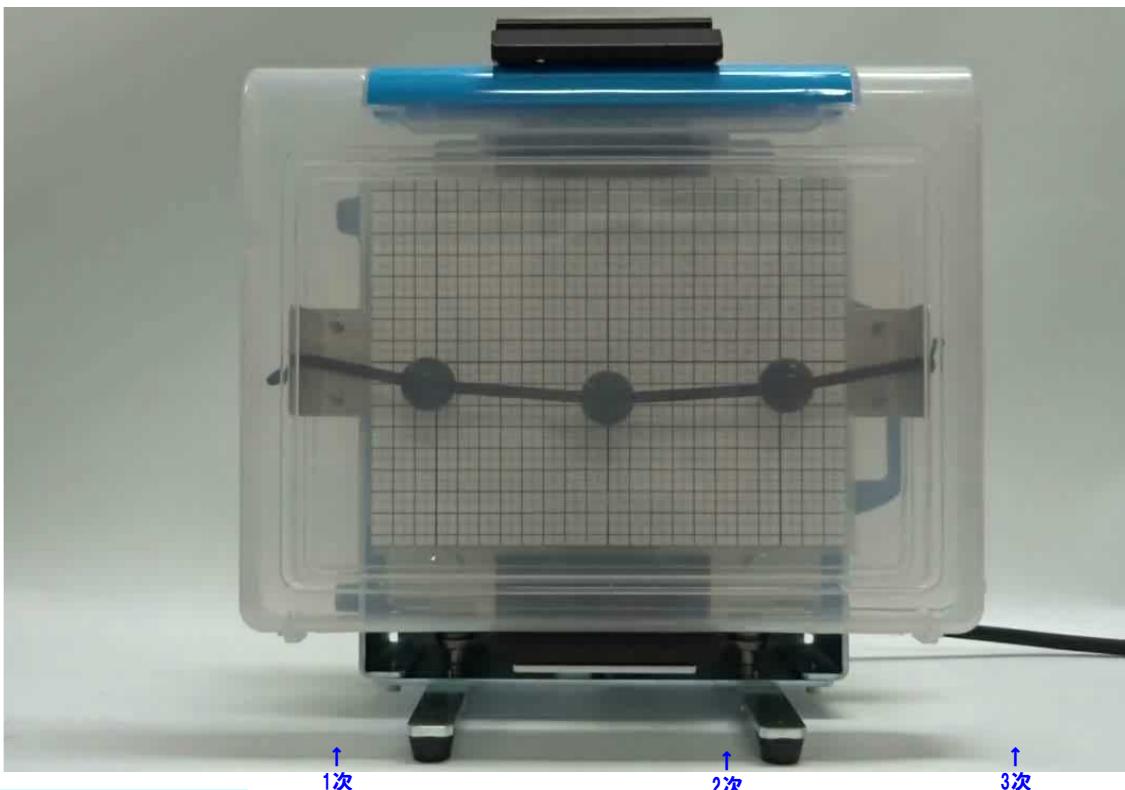


2自由度問題

共振周波数【1次：1.40Hz, 2次：3.30Hz】

共振の実際（垂直方向加振）

垂直 No. 5
質量のついた弦



3自由度問題

共振周波数【1次：5.30Hz, 2次：8.97Hz, 3次：11.75Hz】

(5) シミュレーションとは

シミュレーションとは、現象の時間的な経過を模擬的手段（真似ること、似せること）によって再現あるいは仮想的に構成することをいいます。模擬的手段としては、普通コンピュータを利用した数値的方法がとられます。

運動や振動のシミュレーションとは、運動系あるいは振動系がどのように動くか、あるいは揺れるかを、運動方程式というものを数値的に解いて調べることです。

今日は、

建物やぶらんこの動き等のいくつかの
↓
シミュレーション結果についても、見ていただきます。

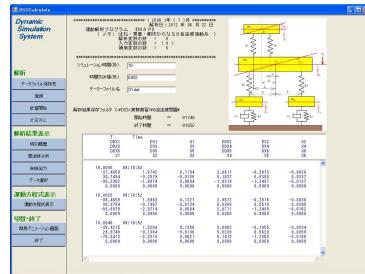
(6) DSSについて

公開(無料ダウンロード)

「DSS」は、運動方程式を数値計算により解き、解析結果をグラフィック出力するという一連の作業を支援するためのソフトウェアである。動画の管理もできる。
Visual Basic で記述されており、Windows 上で動く。

運動方程式

2階の常微分方程式で記述されるような問題であり、解析変数の数が6変数までのものが扱える。



「MAP」による数値計算

デモ用プログラム(その1)

: 基礎的な問題から専門的な問題まで20例用意。

デモ用プログラム(その2)

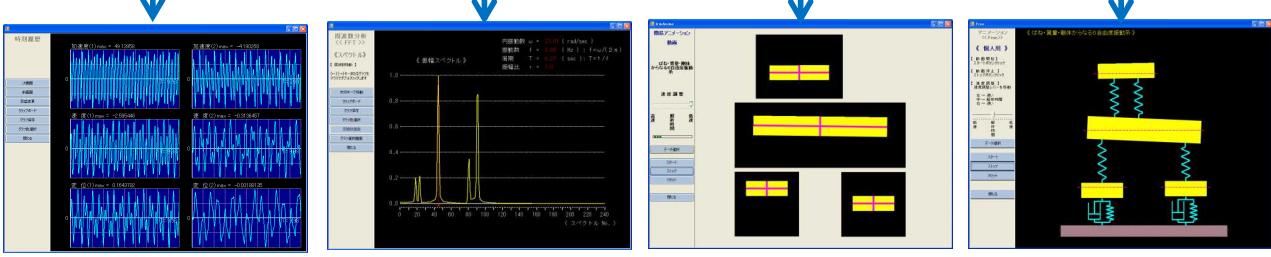
: 振動問題を15例用意。

実験教材用プログラム

: 15例用意。

個人用プログラム

: 学習者が自由に追加。



「GRAPH」による
時刻履歴出力

「FFT」による
周波数分析出力

「ANIMATION」による
簡易アニメ出力

「FREE」による
自由出力

デモ用プログラム(その1) : 20例

(基礎的な問題から応用的な問題まで)

運動問題 と 振動問題	No.1	No.2	No.3	No.4	No.5	No.6
No.7						
No.14						
No.20						

デモ用プログラム(その2) : 15例

(振動問題)

No. 1	No. 2	No. 3	No. 4	No. 5
No. 6	No. 7	No. 8	No. 9	No. 10
No. 11	No. 12	No. 13	No. 14	No. 15

実験教材用プログラム : 15例

パッケージタイプ

水平方向加振対象モデル	No.1	No.2	No.3	No.4	No.5
垂直方向加振対象モデル	No.1	No.2	No.3	No.4	No.5

一般タイプ

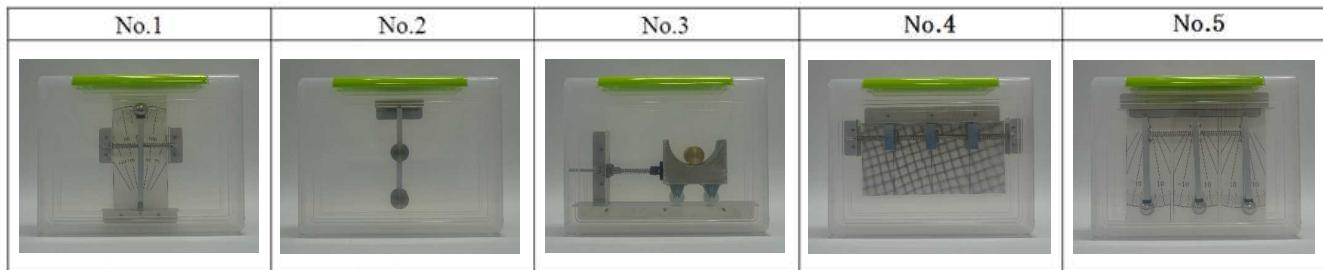
解析モデル	No.1	No.2	No.3	No.4	No.5

(7) 開発した運動と振動の各種教材

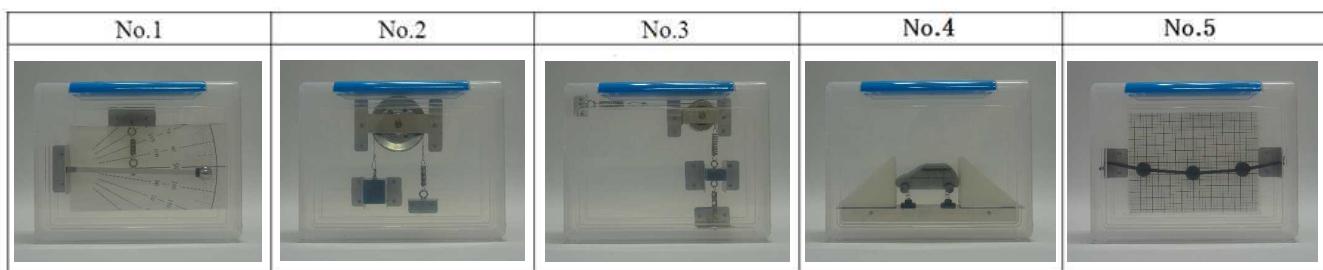
(有)インテスから購入可能

<水平方向用>

パッケージタイプ



<垂直方向用>



加振装置

(有)インテスから購入可能

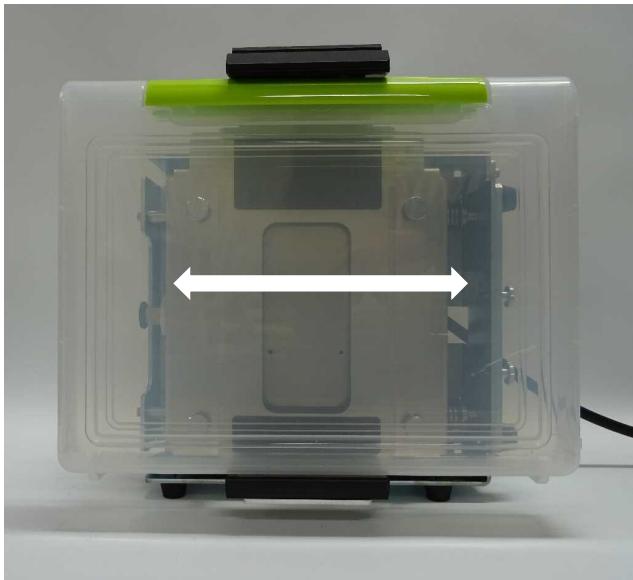
寸法 : 285 × 190 × 335mm (W × D × H)

重量 : 7.1kg (加振部 6.1kg、コントローラ 1.0kg)

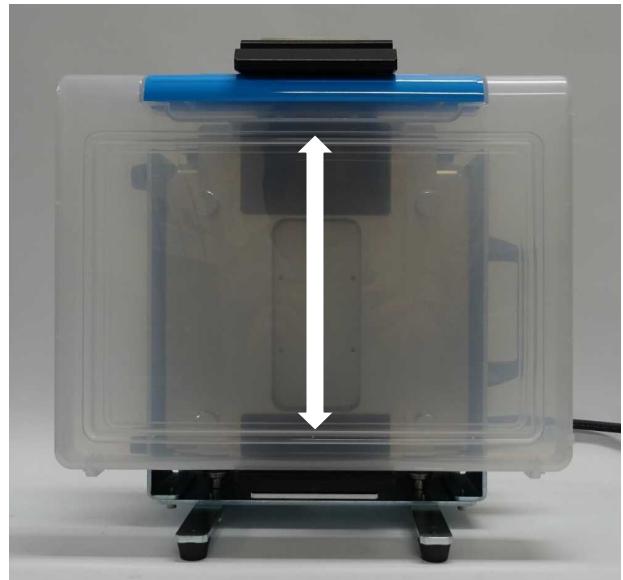


加振装置の基本的な使用方法

パッケージ型加振体を、クランプ部による締付けだけで簡単に固定



水平方向用加振



垂直方向用加振

一般タイプ (その1)



「3階建て構造物」

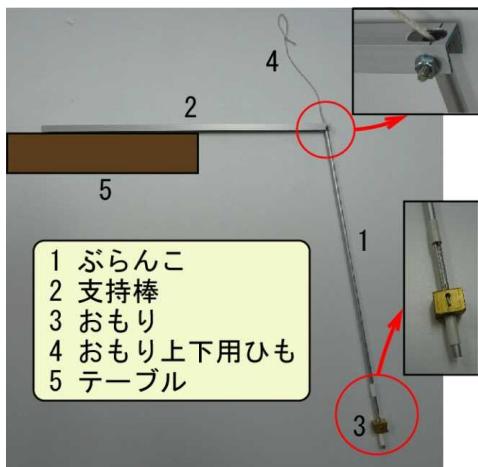


「3自由度直線振動系」



「3自由度ねじり振動系」

一般タイプ (その2)



(a) 使用時外観



(b) 持運び時外観



「クレーン」

「簡易ぶらんこ」

(有)インテスから購入可能

3. 建物の振動

1. 高層ビルの共振現象

- (1) 地震時のビルの揺れ(動画)
- (2) 長周期地震動による高層ビルの揺れ方
- (3) ビルの高さの違いによる揺れ方の違い

2. 3階建ての建物の振動

- (1) 実験結果(実験観察)
- (2) 解析モデル
- (3) モデルの固有振動数
- (4) シミュレーション結果

3. ビルの高さの違いによる揺れ方の違い

- (1) 屋上の重さが軽い場合
- (2) 屋上の重さが重い場合

1. 高層ビルの共振現象

(1) 地震時のビルの揺れ（動画）



【YouTubeより 2011.3.11 東北地方太平洋沖地震発生時の新宿高層ビル群】

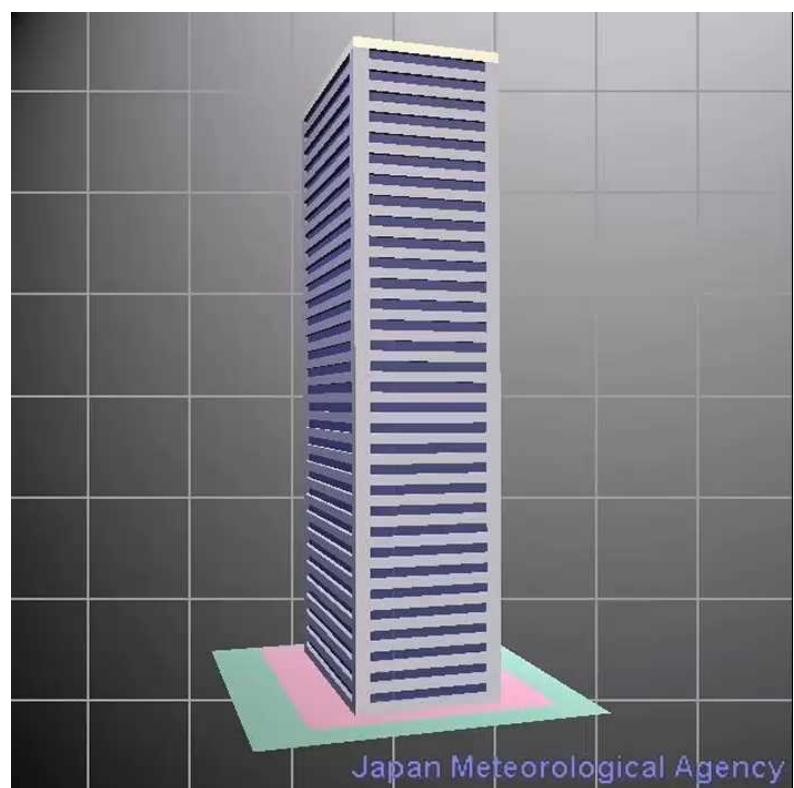
(2) 長周期地震動による高層ビルの揺れ方

長周期地震動により高層ビルは大きく長く揺れます。高層階の方がより大きく揺れる傾向があります。

建物の揺れやすい周期（固有周期）は、高さによって異なり、一般的に高いビルほど長い固有周期をもちます。

同じ地面の揺れでも、建物の高さによって揺れ方は異なります。

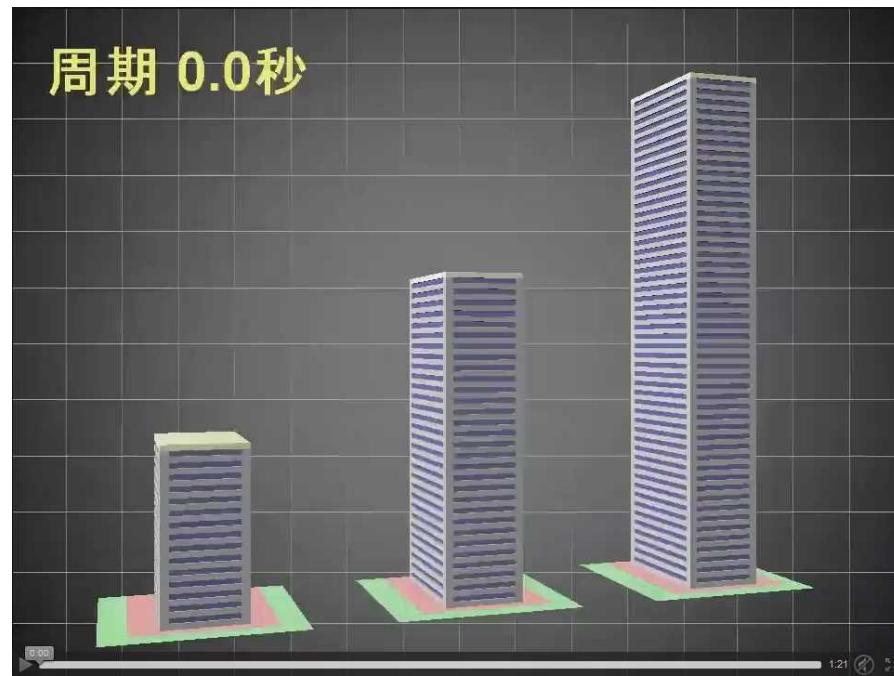
また、地面の揺れの周期と建物の固有周期が一致すると、その建物は大きく揺れます。



【国土交通省 気象庁 ホームページより】

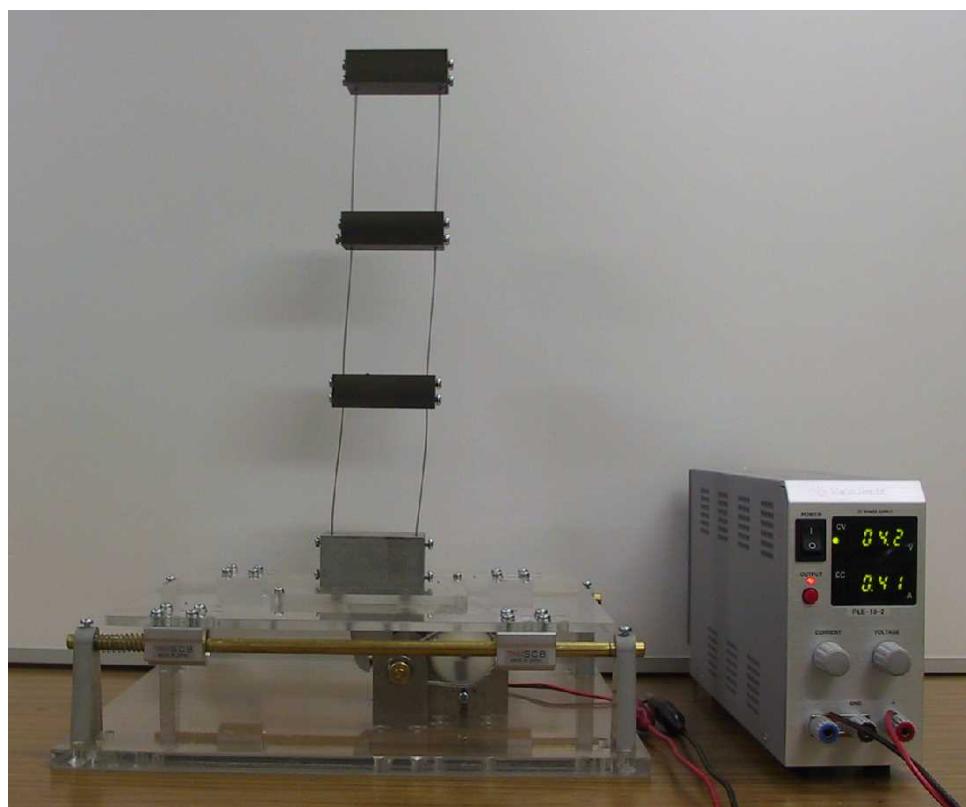
(3) ビルの高さの違いによる揺れ方の違い

左から15階建てのビル(固有周期1.5秒、固有振動数0.67Hz想定)、30階建てのビル(固有周期3秒、固有振動数0.33Hz想定)、50階建てのビル(固有周期5秒、固有振動数0.20Hz想定)です。
最初に周期1.5秒の周期で地面が揺れて、次に3秒、そして5秒の揺れに変わります。



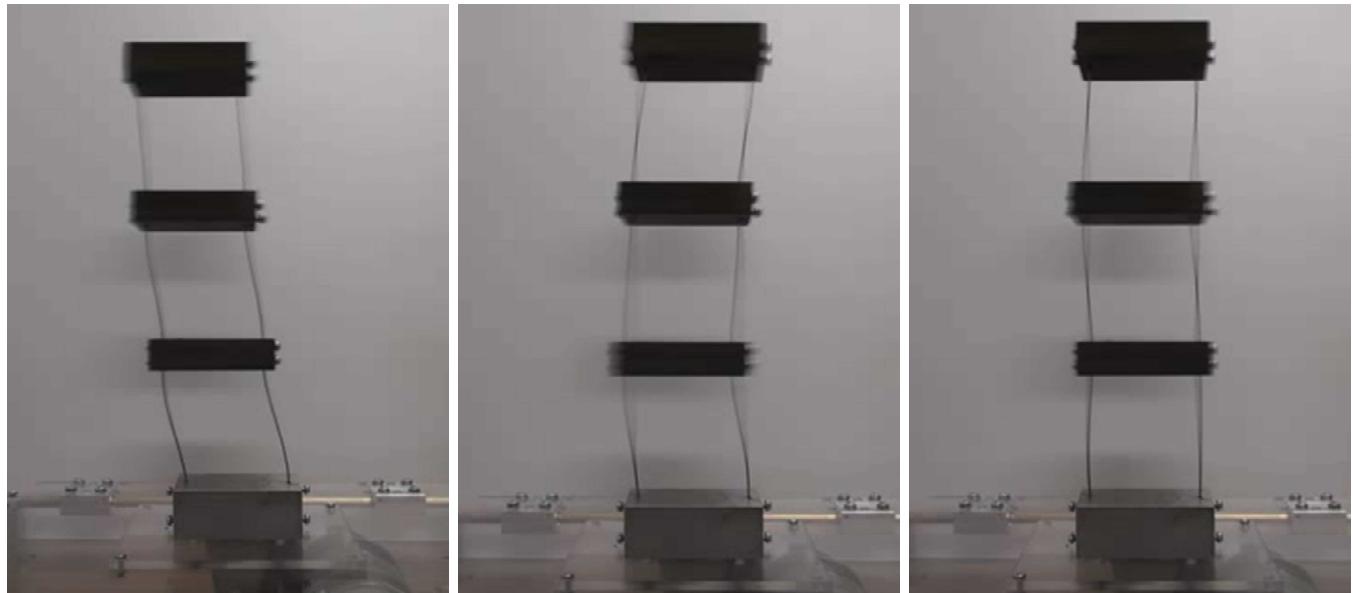
【国土交通省 気象庁 ホームページより】

2. 建物の振動



(1) 実験結果

実際に実験してみましょう！



(a) 1次 (2.8Hz)

(b) 2次 (8.1Hz)

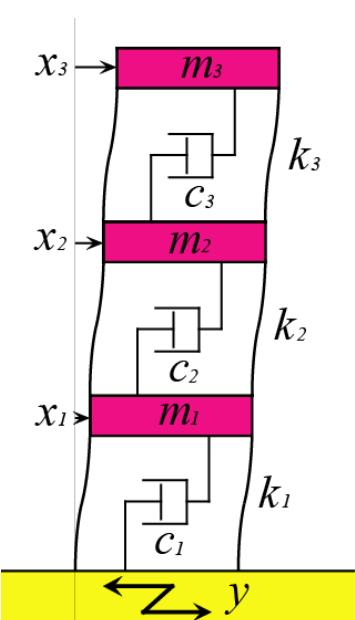
(c) 3次 (11.9Hz)

共振時

(振動数の違いと振動の形(モード)の違いに注目)

(2) 解析モデル

<運動方程式>



振動減衰の影響を考慮できるように、粘性減衰(c)を考慮したモデルとした。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$$

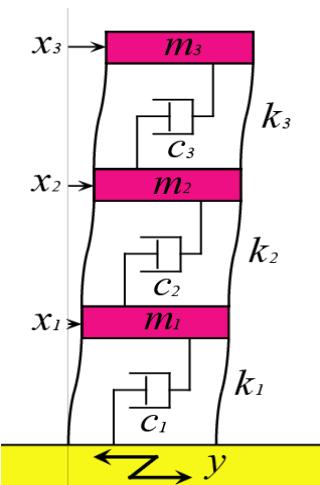
$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= m_1, & a_{22} &= m_2, & a_{33} &= m_3 \\ a_{14} &= -m_1\ddot{y} - k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 - k_2x_1 - c_2\dot{x}_1 + k_2x_2 + c_2\dot{x}_2 \\ a_{24} &= -m_2\ddot{y} - k_2x_2 - c_2\dot{x}_2 - k_3x_2 - c_3\dot{x}_2 + k_2x_1 + c_2\dot{x}_1 + k_3x_3 + c_3\dot{x}_3 \\ a_{34} &= -m_3\ddot{y} - k_3x_3 - c_3\dot{x}_3 + k_3x_2 + c_3\dot{x}_2 \end{aligned} \right\}$$

加振：変位加振(による強制振動)

$$y = A \sin \omega t, \quad \ddot{y} = -A\omega^2 \sin \omega t$$

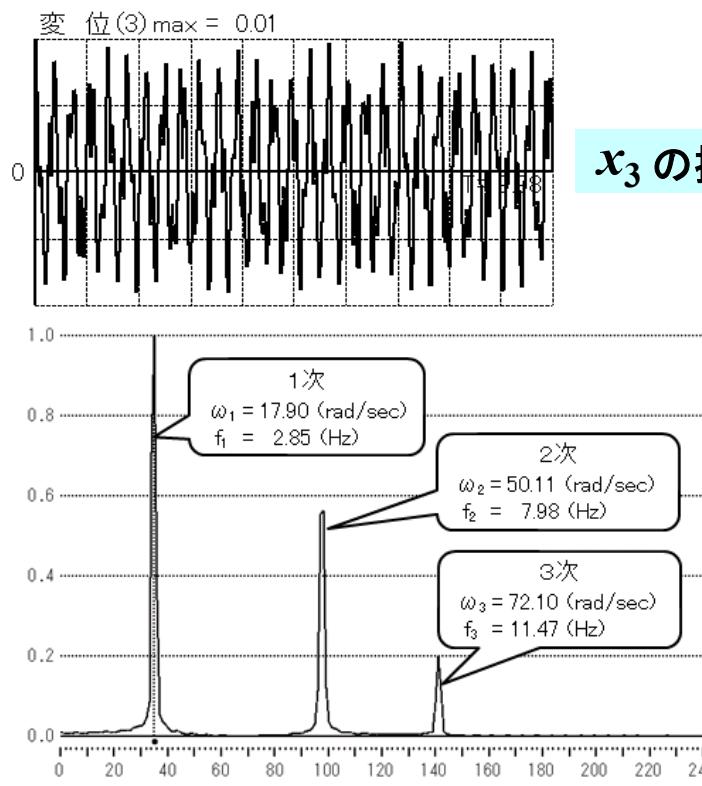
(3) モデルの固有振動数

$x_3=10\text{mm}$ として自由振動
(DSSを用いてシミュレーション)

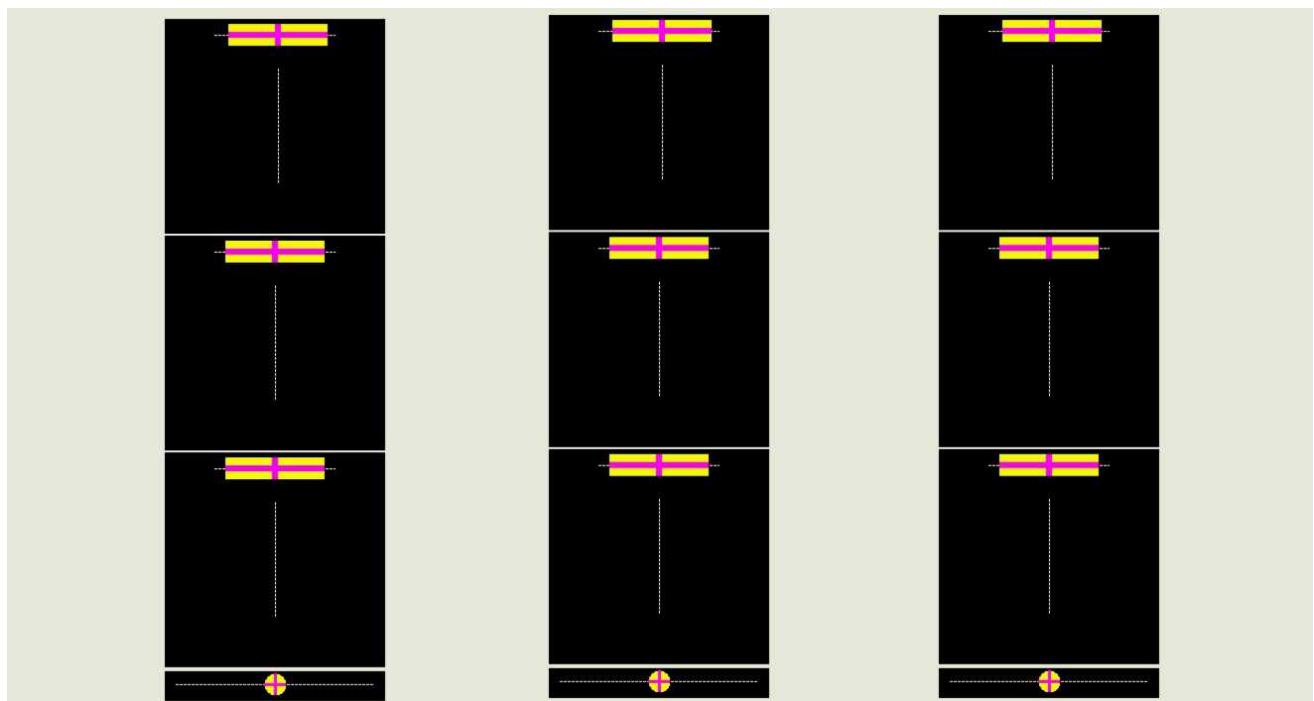


<モデル定数>

$m_1 = 380.0 \text{ (g)}$
 $m_2 = 380.0 \text{ (g)}$
 $m_3 = 384.5 \text{ (g)}$
 $k_1 = k_2 = k_3 = 610 \text{ (N/m)}$
 $A = 1 \text{ (mm)}$
 $c = 0 \text{ (N}\cdot\text{s/m)}$



(4) シミュレーション結果



(a) 1次 (2.85Hz)

(b) 2次 (7.98Hz)

(c) 3次 (11.47Hz)

共振時

3. ビルの高さの違いによる揺れ方の違い

(1) 屋上の重さが軽い場合



<固有振動数>

高:4.6Hz

中:6.8Hz

低:9.0Hz

<実験内容>

振動数を徐々に
大きくしていき、

高→中→低

の順に共振が発
生するのを見る。

振動実験結果（停止→高速）

<クリップのみ>



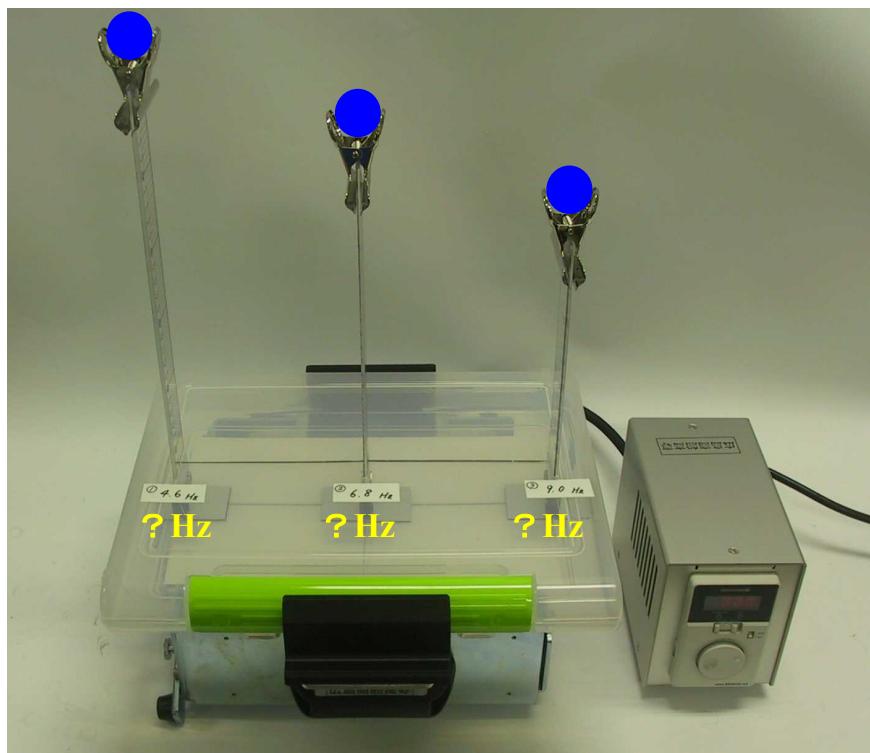
長いはり($f=4.71\text{Hz}$)

中間はり($f=6.56\text{Hz}$)

短いはり($f=9.75\text{Hz}$)

(2) 屋上の重さが重い場合

クリップの上に、それぞれ「おもり」をつけたらどうなるでしょうか？



<固有振動数>

高: ___ Hz

中: ___ Hz

低: ___ Hz

<実験内容>

振動数を徐々に
大きくしていき、

高→中→低

の順に共振が発
生するのを見る。

振動実験結果（停止→高速）

<クリップ+鋼球>



長いはり($f=2.20\text{Hz}$)

中間はり($f=2.87\text{Hz}$)

短いはり($f=4.24\text{Hz}$)

4. 簡易ぶらんこを漕いでみよう！

1. ぶらんこの不思議

- (1) ぶらんこの原理(シミュレーション)
- (2) ぶらんこがなぜ漕げれるかのまとめ

2. 簡易ぶらんこを漕いでみよう

- (1) 簡易ぶらんこについて
- (2) 簡易ぶらんこの漕ぎ方のいろいろ
- (3) 解析モデル
- (4) 簡易ぶらんこに適した漕ぎ方
- (5) 簡易ぶらんこの漕ぎ方の確認(シミュレーション)
- (6) 簡易ぶらんこの漕ぎ方の確認(実験)
- (7) 実際に漕いでみよう

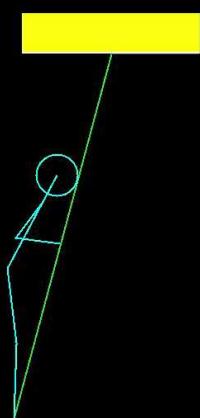
1. ぶらんこの不思議

(1) ぶらんこの原理（シミュレーション）

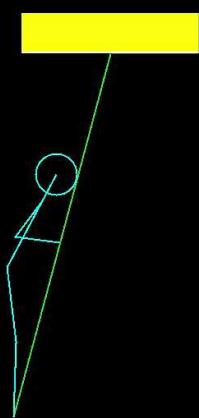
① ぶらんこの漕ぎ方を考えてみます。

みなさん、最初うまくぶらんこを漕ぐことができましたか？

ぶらんこを漕ぐとは、どういうことなのでしょうか？



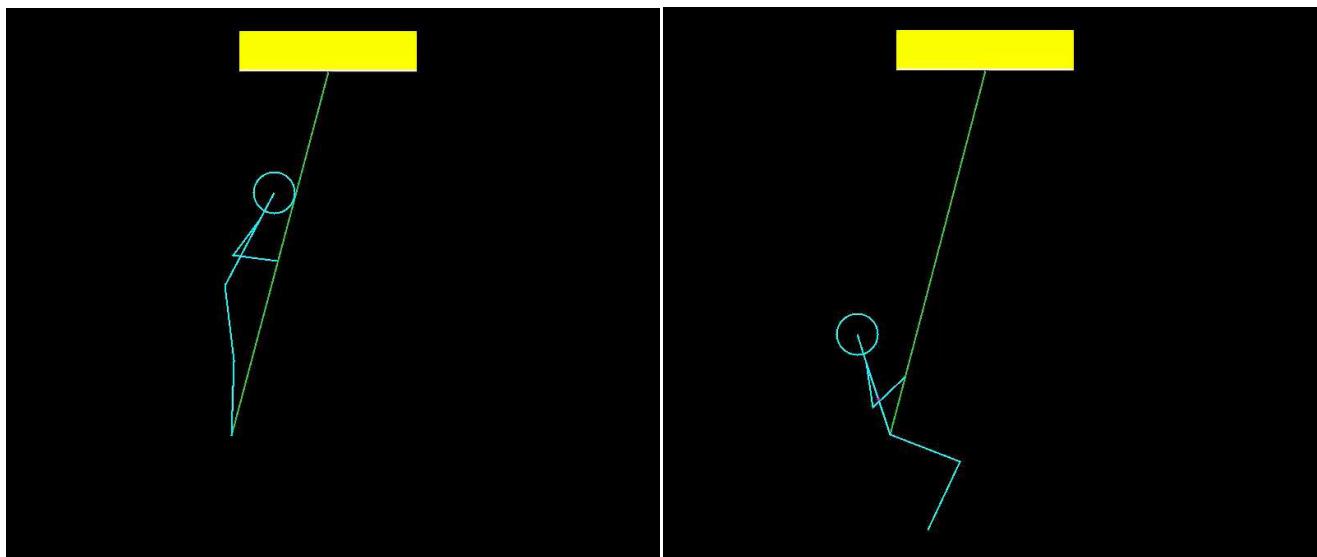
正しく漕いだ場合



でたらめに漕いだ場合

② 立ち漕ぎと、座り漕ぎではどちらがよく漕げますか？

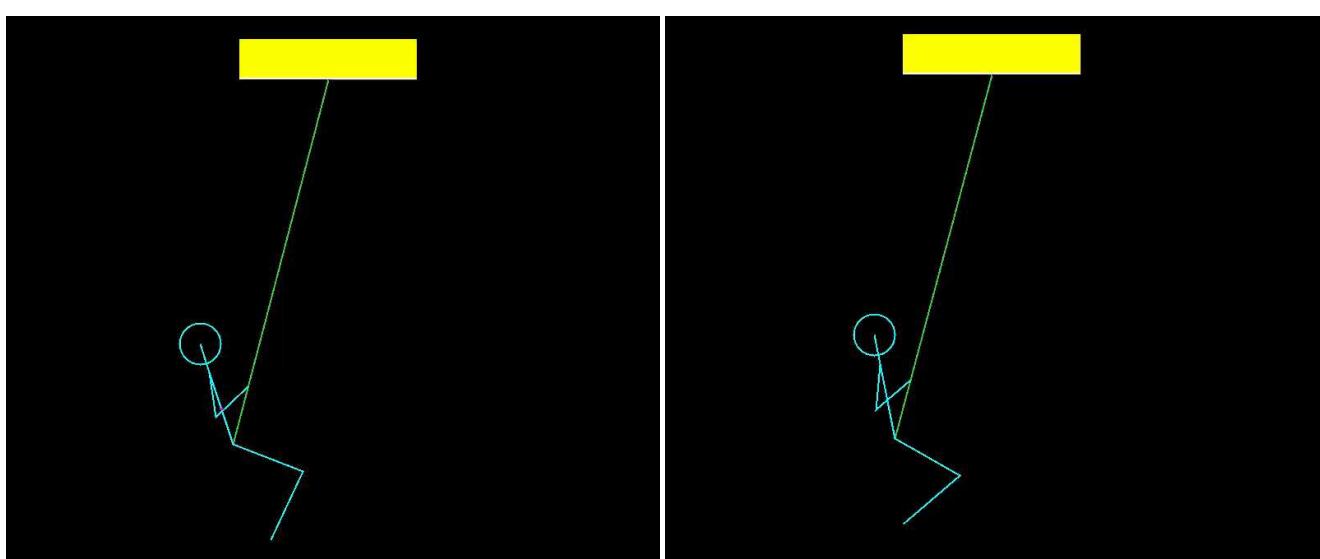
ぶらんこを漕ぐ周期と重心の移動距離に注目してください！



立ち漕ぎの場合

座り漕ぎの場合

③ 座り漕ぎをしながら、押してもらうとどうなりますか？



押してもらわない場合

押してもらう場合

★ 「ぶらんこ」は、振動の性格を利用した一例です。

(2) ぶらんこがなぜ漕げれるかのまとめ

① ぶらんこは、人の重心の上下移動によって漕いでいます。

<ポイント1> 前後に力を入れて漕いでいるわけではありません。

② ぶらんこは、ぶらんこの触れにあわせないと漕げません。

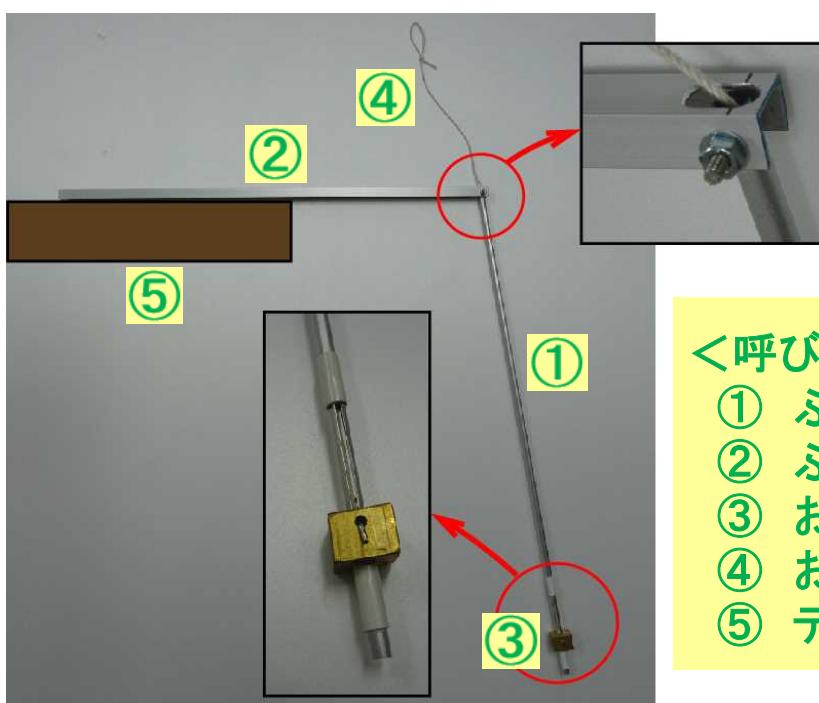
<ポイント2> ぶらんこの性格を上手に刺激するということです。
(共振の利用)

③ ぶらんこは、重心の上下移動の量が多い程、よく漕げます。

<ポイント3> しっかり漕ぎたい人は、立って漕いでいます。

2. 簡易ぶらんこを漕いでみよう

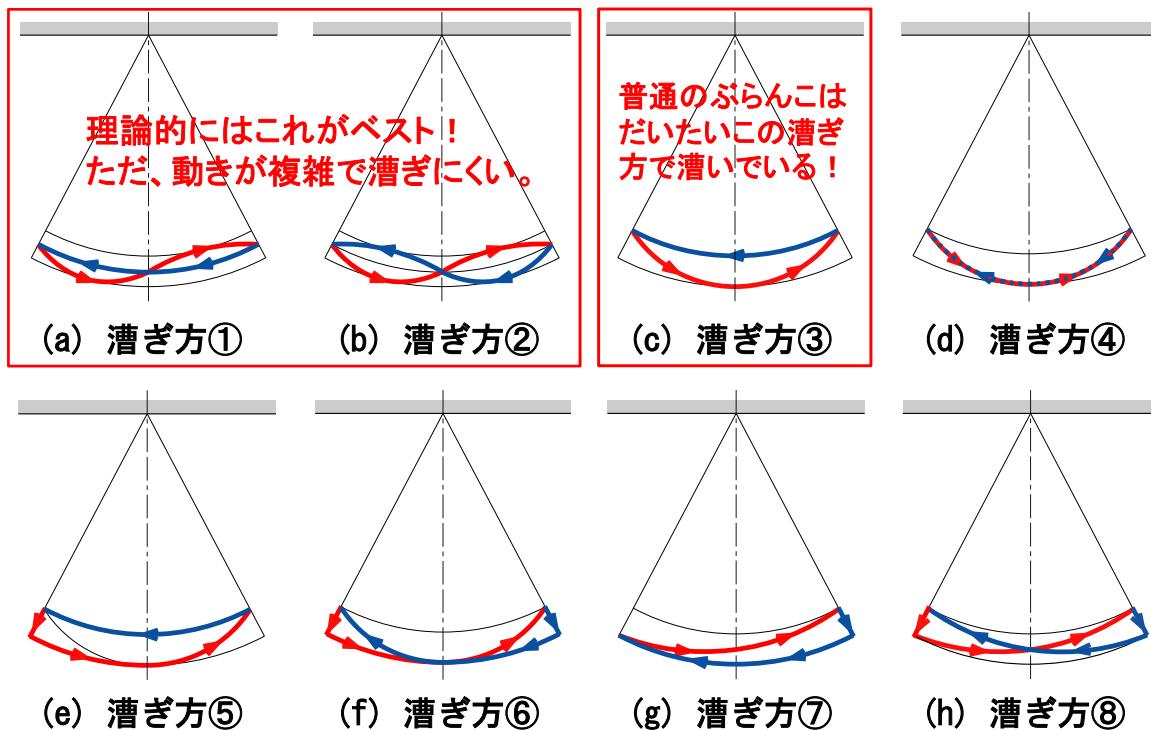
(1) 簡易ぶらんこについて



<呼び方>

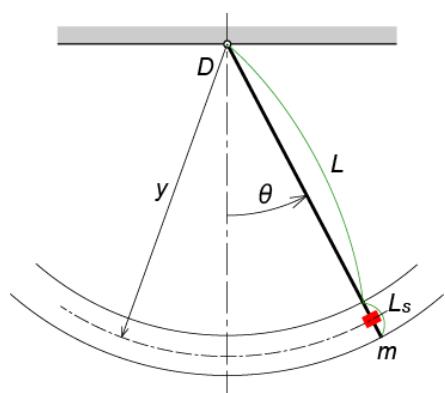
- ① ぶらんこ
- ② ぶらんこ支持棒
- ③ おもり
- ④ おもり上げ下げ用ひも
- ⑤ テーブル

(2) 簡易ぶらんこの漕ぎ方のいろいろ



(3) 解析モデル

2自由度(解析変数 θ + 入力変数 y)



振動減衰の影響を考慮できるように、粘性減衰(D)を考慮したモデルとした。

<注: ω について>

ぶらんこにおいては係数が変化しているので(ぶらんこを漕ぐことによって、ぶらんこの長さ y は常に変化), 厳密には固有円振動数は存在しない。本シミュレーションにおいては、シミュレーションの都合上、おもりの重心が一番下にある場合の振動数をこの系の固有円振動数とした。

<運動方程式>

$$my^2\ddot{\theta} = -2my\dot{y}\dot{\theta} - mg y \sin \theta - D y \dot{\theta} \quad (1)$$

漕ぎ方に対応した式(1)における y と \dot{y} については、次に示すような入力変数(重心移動を考慮)で定義した。
漕ぎ方①と②の y と \dot{y} の基本式を、次に示す。

$$\left. \begin{array}{l} y = \left(L + \frac{L_s}{2} \right) + \frac{L_s}{2} \sin(2\omega t) \\ \dot{y} = \omega L_s \cos(2\omega t) \end{array} \right\} \quad (2)$$

漕ぎ方③～⑥の y と \dot{y} の基本式を、次に示す。

$$\left. \begin{array}{l} y = L + L_s \sin(\omega t) \\ \dot{y} = \omega L_s \cos(\omega t) \end{array} \right\} \quad (3)$$

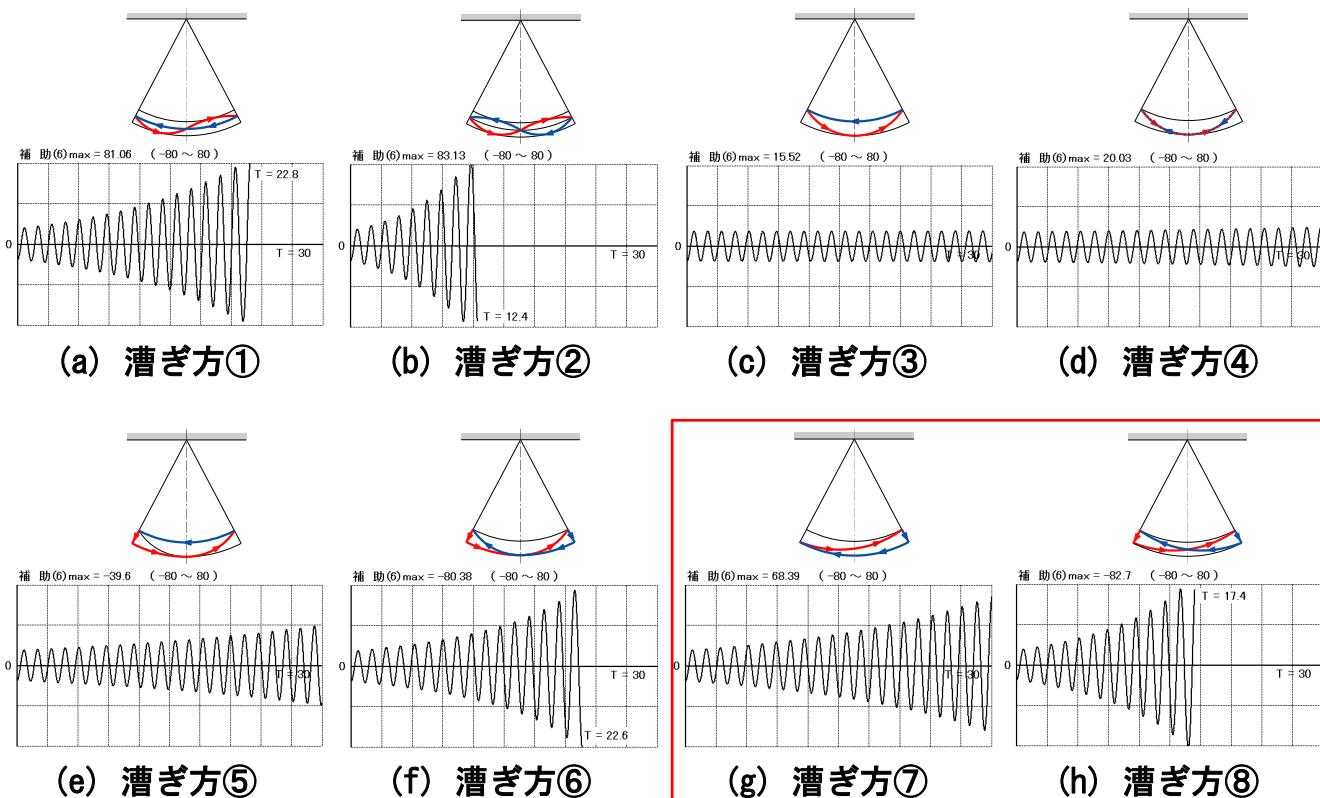
漕ぎ方⑦と⑧の y と \dot{y} の基本式を、次に示す。

$$\left. \begin{array}{l} y = L + L_s \cos(0.5\omega t) \\ \dot{y} = -0.5\omega L_s \sin(0.5\omega t) \end{array} \right\} \quad (4)$$

式(2)～式(4)中の ω は、簡易ぶらんこの固有円振動数であり、次式のように定義した。

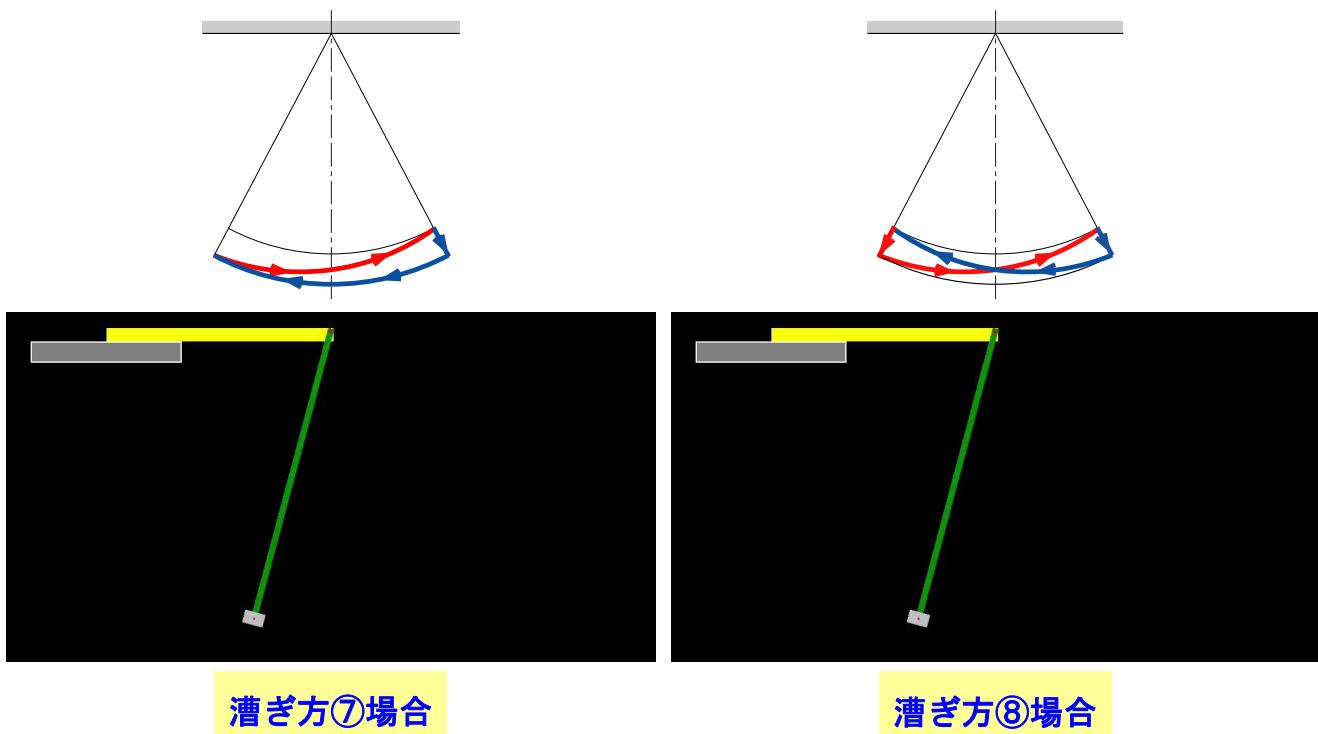
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L + L_s}} \quad (5)$$

(4) 簡易ぶらんこに適した漕ぎ方



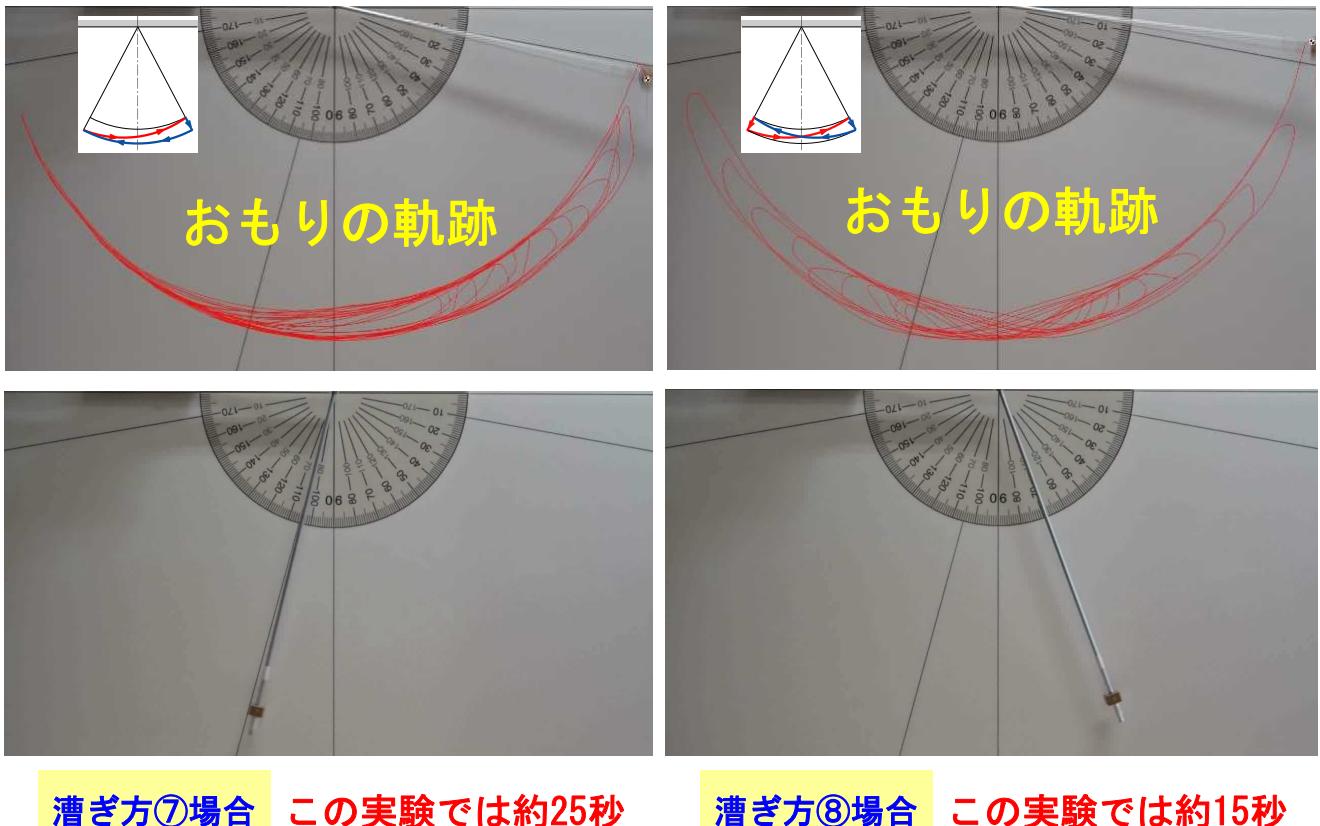
ゆっくり漕いで早く大きく揺れるので、簡易ぶらんこはこれがベスト！

(5) 簡易ぶらんこの漕ぎ方の確認（シミュレーション）



ぶらんこの漕ぎ方の違いによる、ぶらんこの触れ方の違いを見てください！

(6) 簡易ぶらんこの漕ぎ方の確認（実験）



漕ぎ方⑦場合 この実験では約25秒

漕ぎ方⑧場合 この実験では約15秒

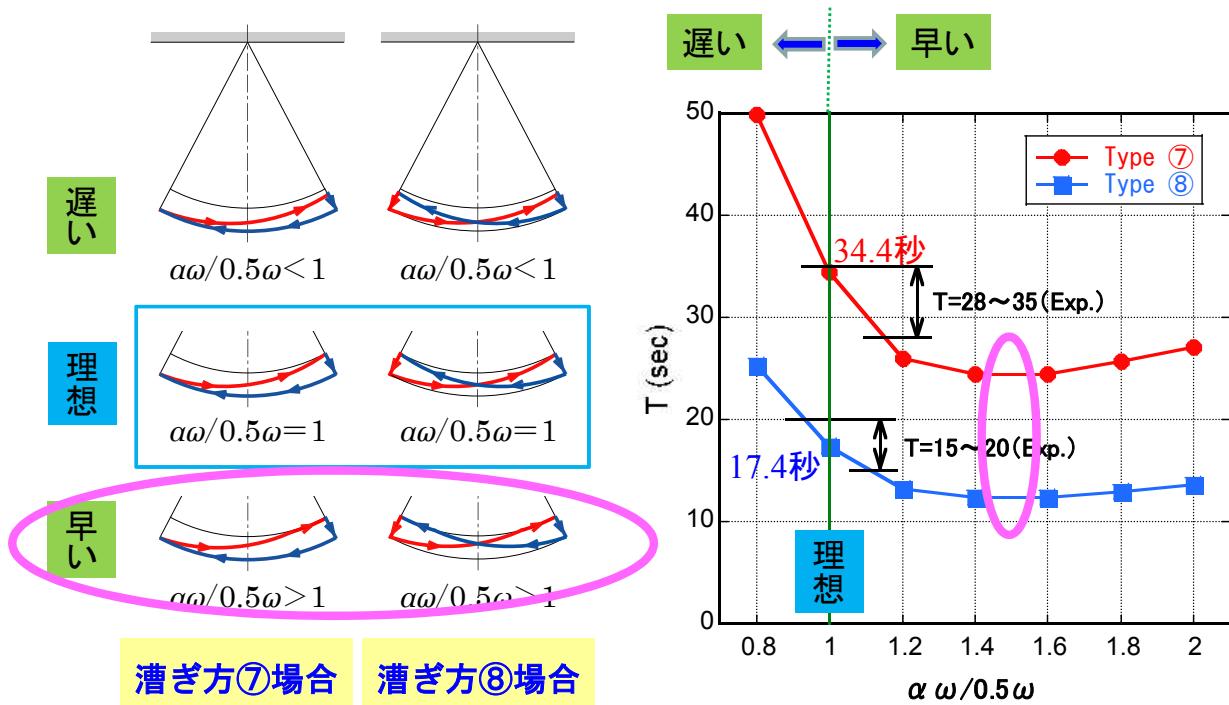
シミュレーション結果と実験結果の比較

ぶらんこの振り上がり角度が80度になるまでに要した時間

Type	Time (sec)	
⑦	Sim.	34.4
	Exp.	28~35
⑧	Sim.	17.4
	Exp.	15~20

気になる点：実験結果のばらつきは何なのか？とりわけ、実験の方が早く漕げていることがあるが、なぜなのか？

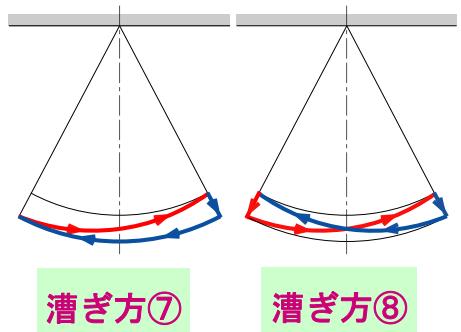
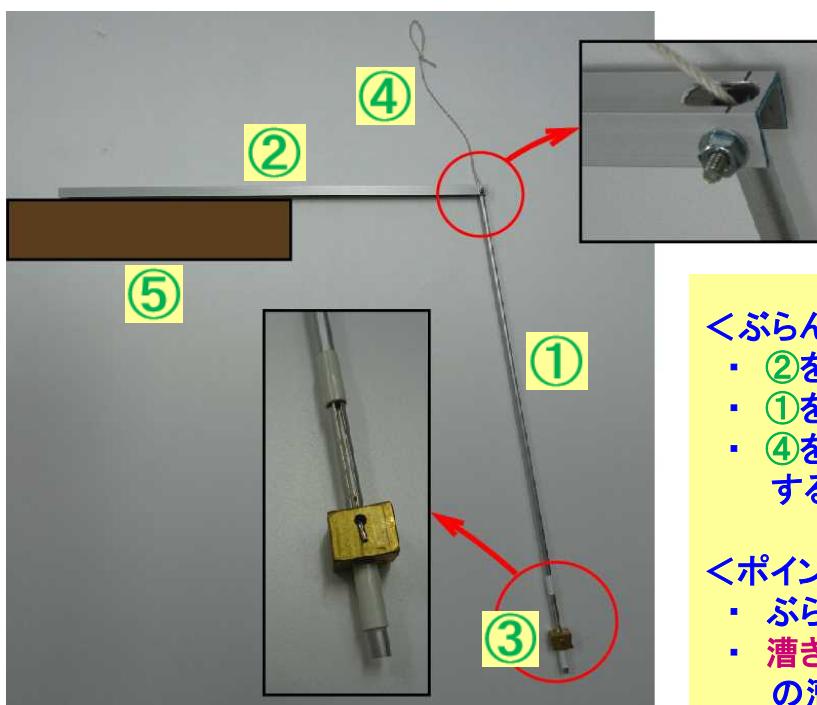
ぶらんこのひもを引くタイミングが振り上がり時間に与える影響



<結論>

- ・ひもを理想状態よりも遅く引っ張ると、時間は長くかかる。
- ・ひもを理想状態よりも早く引っ張ると、時間は短くなる。
- ・ひもの引っ張り方によっては(約1.5)、漕ぎ方①と②に近い時間で漕ぐこともできる。

(7) 実際に漕いでみよう



<ぶらんこの漕ぎ方>

- ・②を⑤に固定(手で押さえる)する。
- ・①を少し振らせる。
- ・④を使って③を上手に上げ下げすると、①の振れは大きくなる。

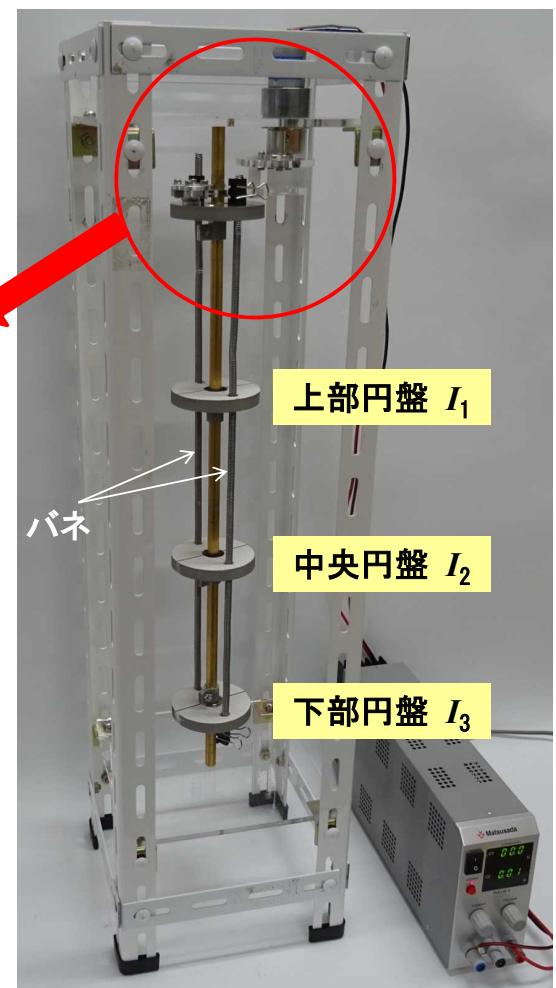
<ポイント>

- ・ぶらんこ①の振れに合わせること。
- ・漕ぎ方⑦か、漕ぎ方⑧のどちらかの漕ぎ方で、慌てずに漕ぐこと。

5. ねじり振動

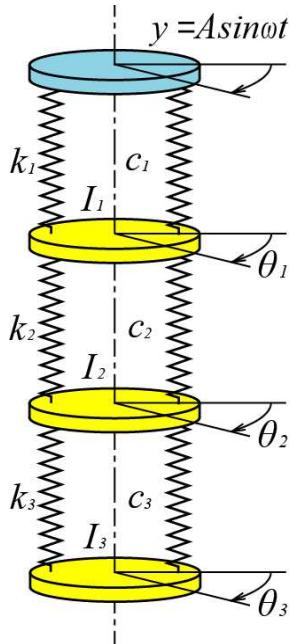
- (1) 実験装置
- (2) 3自由度ねじり振動系
- (3) 系の固有振動数
- (4) 振動問題の特別なルール
- (5) シミュレーションとは
- (6) DSSについて
- (7) 開発した運動と振動の各種教材

(1) 実験装置



(2) 3自由度ねじり振動系

運動方程式



振動減衰の影響を考慮できるように、粘性減衰(c)を考慮したモデルとした。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= I_1, & a_{22} &= I_2, & a_{33} &= I_3 \\ a_{14} &= -k_1\theta_1 - c_1\dot{\theta}_1 - k_2\theta_1 - c_2\dot{\theta}_1 \\ &\quad + k_2\theta_2 + c_2\dot{\theta}_2 + k_1y + c_1\dot{y} \\ a_{24} &= -k_2\theta_2 - c_2\dot{\theta}_2 - k_3\theta_2 - c_3\dot{\theta}_2 \\ &\quad + k_2\theta_1 + c_2\dot{\theta}_1 + k_3\theta_3 + c_3\dot{\theta}_3 \\ a_{34} &= -k_3\theta_3 - c_3\dot{\theta}_3 + k_3\theta_2 + c_3\dot{\theta}_2 \end{aligned} \right\}$$

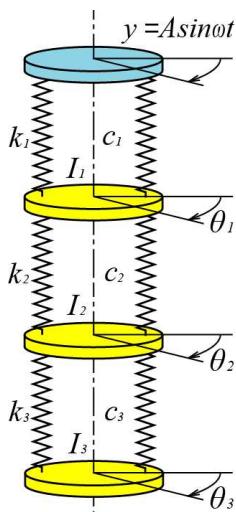
加振：変位加振(変位による強制振動)

解析モデル

$$y = A \sin \omega t, \quad \dot{y} = A\omega \cos \omega t$$

(3) 系の固有振動数

$\theta_3=0.5(\text{rad})$ として自由振動
(DSSを用いてシミュレーション)



<モデル定数>

$$I_1 = I_2 = 7.7 \times 10^{-5} (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

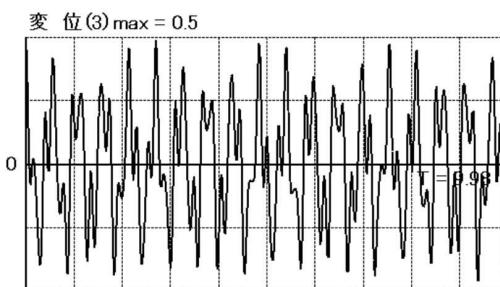
$$I_3 = 7.2 \times 10^{-5} (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 5.14 \times 10^{-2} (\text{N} \cdot \text{m} / \text{rad})$$

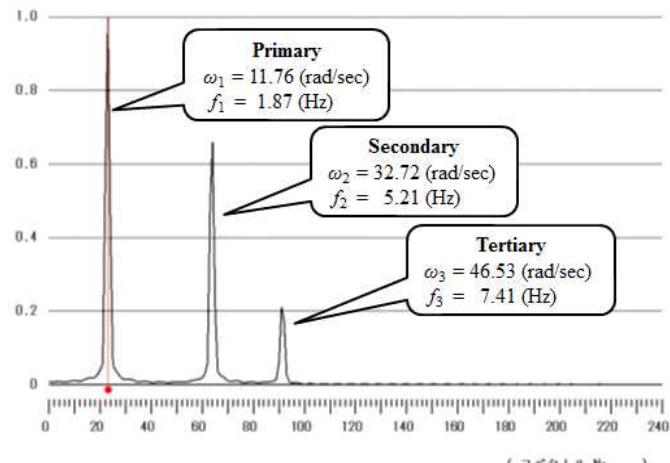
$$A = 0.371 (\text{rad})$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0 (\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} / \text{rad})$$

自由振動時



θ_3 の振動波形



FFTによる周波数分析結果

(4) 実際の動きの確認

- 1次共振
- 2次共振
- 3次共振



- 実験結果
- アニメーション(DSS)



(a) 1次 (1.87Hz)



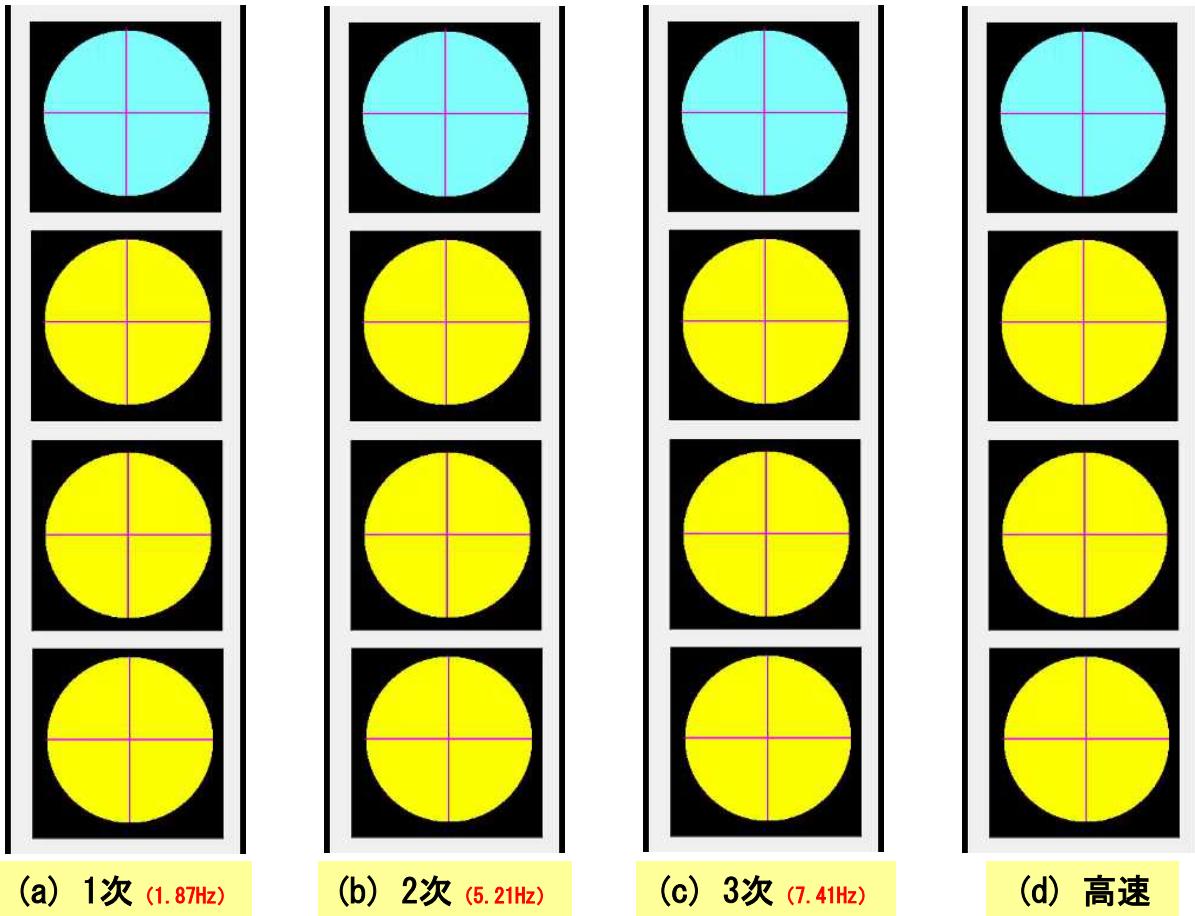
(b) 2次 (5.21Hz)



(c) 3次 (7.41Hz)



(d) 高速



(a) 1次 (1.87Hz)

(b) 2次 (5.21Hz)

(c) 3次 (7.41Hz)

(d) 高速

共振アニメーション

(3) 3自由度ねじり振動系

6. おわりに

運動問題や振動問題に関する各種教材をYouTubeで紹介しています！



**振動現象学習用教材
-3自由度直線振動系-**

**振動現象学習用教材
-パッケージ型振動体-
垂直方向用**

**等速度運動・等加速度運動問題
を「図式解法」で解いてみよう！**

**振動現象学習用教材
-3階建て構造物の振動-**

**振動現象学習用教材
-パッケージ型振動体-
水平方向用**

公式は一切使わなくていい！

- ① 概要編
- ② 具体例前編
- ③ 具体例後編

**振動現象学習用教材
-3自由度ねじり振動系-**

**振動現象学習用教材
-簡易ぶらんこ-**

**運動・振動問題学習用教材
-クレーンの旋回運動-**

(有)インテスのHPからDSSをダウンロードできます！